TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica
Tentamen Algebra 2, 2WF10,
Donderdag 10 november 2011, 14:00 – 17:00

Name :

Student number :

Exercise	1	2	3	4	5	total
points						

Notes: This exam consists of 5 exercises. You can reach 50 points. The final mark is computed by dividing the total number of points by 5 and rounding the result to the nearest integer.
Make sure to justify your answers in detail. It is not sufficient to state the correct result without the explanation.
All exercises are stated in Dutch and in English.

Attentie: Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. U kunt maximaal 50 punten behalen. Het cijfer wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen en het resultaat tot een geheel cijfer af te ronden.
De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer uw antwoorden, tenzij anders vermeld.
Alle opgaven worden in het nederlands en in het engels gepresenteerd.

1. Determine for every $m \in \{7, 12\}$ the integers k and n such that the submonoid of $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ generated by $c = 3$ is isomorphic to $C_{k,n} = \{e, c, c^2, \ldots, c^{n+k-1}\}$, where $c^{n+k} = c^k$ and $|C_{k,n}| = n + k$.

   Bepaal voor iedere $m \in \{7, 12\}$ de gehele getallen k en n zodat de door 3 voortgebrachte deelmonoide van $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ isomorf is met $C_{k,n} = \{e, c, c^2, \ldots, c^{n+k-1}\}$, waar $c^{n+k} = c^k$ en $|C_{k,n}| = n + k$. $\boxed{4\text{ P}}$

2. Let $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ denote the field of complex numbers with regular addition and multiplication. Let the sets M_1 and M_2 be defined as follows:
   Laat $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ het lichaam van de complexe getallen met de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging zijn. Laat de verzamelingen M_1 en M_2 als volgt gedefinieerd zijn:

$$M_1 = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C},$$

$$M_2 = \{a + b\sqrt[3]{2} | a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

   (a) State the definition of a ring.
   Geef de definitie van een ring. $\boxed{4\text{ P}}$

   (b) Study whether $(M_1, \cdot)$ is a semigroup.
   Ga na of $(M_1, \cdot)$ een halfgroep is. $\boxed{2\text{ P}}$

   (c) Study whether $(M_2, \cdot)$ is a semigroup.
   Ga na of $(M_2, \cdot)$ een halfgroep is. $\boxed{2\text{ P}}$

   (d) Is $(M_1, +, \cdot)$ a subring of $(\mathbb{C}, +, \cdot)$? Why?
   Is $(M_1, +, \cdot)$ een deelring van $(\mathbb{C}, +, \cdot)$? Waarom? $\boxed{4\text{ P}}$

   (e) Is $(M_2, +, \cdot)$ a subring of $(\mathbb{C}, +, \cdot)$? Why?
   Is $(M_2, +, \cdot)$ een deelring van $(\mathbb{C}, +, \cdot)$? Waarom? $\boxed{1\text{ P}}$

3. Let $(M, \cdot)$ be the group of invertible 2×2 matrices over $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, where $\cdot$ is the usual matrix multiplication. We use $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 17\}$ as representatives of the residue classes modulo 18.
   Laat $(M, \cdot)$ de groep van inverteerbare 2×2 matrices met coëfficiënten in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ zijn met $\cdot$ de matrixvermenigvuldiging. Wij gebruiken $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 17\}$ als representanten van de restklassen modulo 18.

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$$\left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{array} \right).$$

(a) Let $N = \{m \in M | ad - bc \equiv 1 \bmod 6\}$. Show that $(N, \cdot)$ is a subgroup of $(M, \cdot)$.
Laat $N = \{m \in M | ad - bc \equiv 1 \bmod 6\}$ zijn. Toon aan dat $(N, \cdot)$ een ondergroep van $(M, \cdot)$ is. 3 P

(b) State the definition of the centralizer $C(X)$ of a subgroup X in a group G.
Geef de definitie van de centralisator $C(X)$ van een ondergroep X in een groep G. 2 P

(c) State the definition of left cosets of a subgroup H in a group G.
Geef de definitie van linkernevenklassen van een ondergroep H in een groep G. 2 P

(d) State all left cosets of N in M.
Bepaal alle linkernevenklassen van N in M. 3 P

4. Consider the ring $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
Beschouw de ring $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(a) How many elements does R have?
Hoeveel elementen heeft R? 1 P

(b) Compute the order of R^*.
Bereken de orde van R^*. 2 P

(c) Compute the (multiplicative) order of $(1, 3, 4) \in R^*$.
Bereken de (multiplicatieve) orde van $(1, 3, 4) \in R^*$. 2 P

(d) Does there exist an integer m such that $R \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$? If so, compute it, explain how to compute the ring homomorphism and the inverse of the ring homomorphism, and compute the image of $(1, 3, 2)$. If not, why not?
Bestaat er een natuurlijk getal m met $R \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$? Zo ja, bereken m, verklaar hoe het ringhomomorfisme en de inverse van het ringhomomorfisme berekend kunnen worden en bereken het beeld van $(1, 3, 2)$. Zo nee, waarom niet? 7 P

(e) Find two elements $a, b \in R$ so that $a \cdot b = (0, 0, 0)$ but $a, b \neq (0, 0, 0)$.
Bepaal twee elementen $a, b \in R$ zodat $a \cdot b = (0, 0, 0)$ maar $a, b \neq (0, 0, 0)$. 2 P

(f) Compute the number of elements $a \in R$ with $a \neq (0, 0, 0)$ for which there exists a $b \neq (0, 0, 0)$ such that $a \cdot b = (0, 0, 0)$. How many such elements exist inR^*?
Bereken het aantal elementen $a \in R$ met $a \neq (0, 0, 0)$ waarvoor er een $b \neq (0, 0, 0)$ bestaat met $a \cdot b = (0, 0, 0)$. Hoeveel van zulke elementen bestaan er in R^*? 4 P

5. Show that every finite domain is a field.
Hint: use the multiplication-by-a-map to show that a is invertible.
Toon aan dat elk eindig integriteitsgebied een lichaam is.
Hint: gebruik de vermenigvuldiging-met-a-afbeelding om aan te tonen dat a inverteerbaar is. 5 P