

Algebra and discrete mathematics, homework sheet 1

Due: 18 February 2014, 8:45

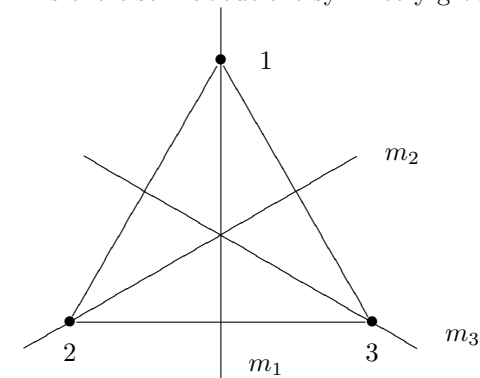
You can hand in in groups of two. Please clearly write the names on the sheet.

1. Consider the subset $\mathbb{Z}[i]$ of the complex numbers given by

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Show that $\mathbb{Z}[i]$ is a submonoid of the monoid $(\mathbb{C}, +, 0)$.

2. This exercise is about the symmetry group of the equilateral triangle.



Symmetry operations of the equilateral triangle are maps that do not change the shape of the triangle. There are 6 different such maps:

id : identity map,

m_1 : reflection in axis through 1,

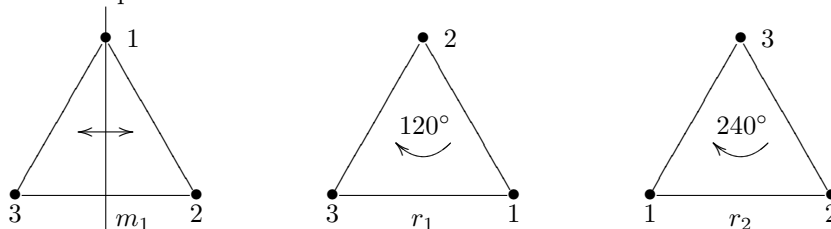
m_2 : reflection in axis through 2,

m_3 : reflection in axis through 3,

r_1 : rotation by 120° mapping 1 to 3,

r_2 : rotation by 240° mapping 1 to 2.

For example:



To determine whether the set of symmetry operations on the equilateral triangle forms a monoid with respect to composition first write a table with all results of composing two transformations. For maps we write $r_1 \circ m_1$ if first m_1 and then r_1 is executed. The table is to be read as follows: each table entry is the result of performing the operation stated in same row in the leftmost column first, followed by the one in the same column in the top row. E.g. $r_1 \circ m_1$ is found in the row of m_1 and the column of r_1 and equals m_2 .

- (a) Show that the set of symmetry operations on the equilateral triangle forms a monoid. To show this, write the complete multiplication table and identify the neutral element. You do not need to prove associativity.
 - (b) Find all submonoids.
3. Let $S := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 2a + 3b \in 7\mathbb{Z}\}$.

- (a) We define an operation $\circ$ on elements of S as follows:

$$(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Show that $(S, \circ)$ is a commutative monoid.

- (b) We define a different operation $\diamond$ on S as follows:

$$(a_1, b_1) \diamond (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2).$$

Investigate whether $(S, \diamond)$ forms a monoid.

Algebra en discrete wiskunde, huiswerk blad 1

18 Februari 2014, 8:45

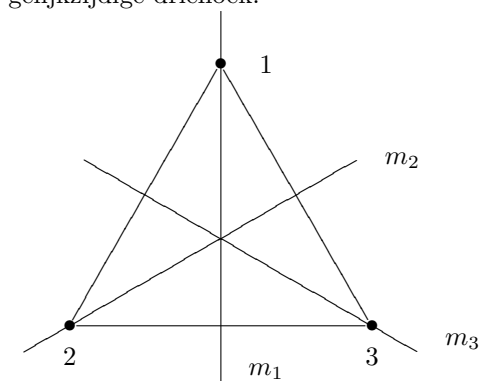
Het is toegestaan het werk in groepjes van twee in te leveren. Schrijf duidelijk de namen van de betrokken studenten op het werk.

1. Beschouw de deelverzameling $\mathbb{Z}[i]$ van de complexe getallen

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Toon aan dat $\mathbb{Z}[i]$ een deelmonoïde van de monoïde $(\mathbb{C}, +, 0)$ is.

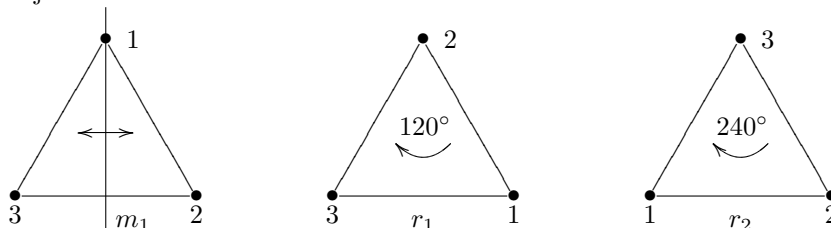
2. De volgende opgave betreft de groep van symmetrie-operaties (symmetrieën) van de gelijkzijdige driehoek.



De symmetrie-operaties van de gelijkzijdige driehoek zijn afbeeldingen die de vorm van de driehoek niet veranderen. Er zijn 6 verschillende van zulke afbeeldingen:

- id : identieke afbeelding,
- m_1 : spiegeling om de lijn door 1,
- m_2 : spiegeling om de lijn door 2,
- m_3 : spiegeling om de lijn door 3,
- r_1 : rotatie over 120° die 1 op 3 afbeeldt,
- r_2 : rotatie over 240° die 1 op 2 afbeeldt.

Bijvoorbeeld:



Maak eerst een tabel van transformaties om aan te tonen dat de verzameling symmetrie-operaties van de gelijkzijdige driehoek een monoïde vormt met betrekking tot compositie van afbeeldingen. Als eerst m_1 en daarna r_1 wordt uitgevoerd, dan noteren we de compositie door $r_1 \circ m_1$. De tabel ziet er als volgt uit: ieder element in de tabel wordt verkregen door de operatie die in meest linker kolom staat eerst uit te voeren, gevolgd door de operatie die in bovenste rij staat. Dus het element $r_1 \circ m_1$ staat in de rij van m_1 en in de kolom van r_1 en $r_1 \circ m_1 = m_2$.

- (a) Toon aan dat de verzameling symmetrie-operaties van de gelijkzijdige driehoek een monoïde vormt. Maak daartoe de volledige vermenigvuldigingstabel en identificeer het eenheidselement. Het is niet nodig om de associatieve wet te bewijzen.
- (b) Vind alle deelmonoïden.
3. Laat de verzameling S als volgt gedefinieerd zijn: $S := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 2a + 3b \in 7\mathbb{Z}\}$.
- (a) Laat de bewerking $\circ$ op elementen van S als volgt gedefinieerd zijn:

$$(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Toon aan dat $(M_1, \cdot)$ een commutative monoïde is.

- (b) Laat de bewerking $\diamond$ op elementen van S als volgt gedefinieerd zijn:

$$(a_1, b_1) \diamond (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2).$$

Ga na of $(S, \diamond)$ een monoïde is.